3) Cálculo de $f^*(x)$ ✓

Para ello de: $y = f(x)$

- Se despeja x en función de y
- Se intercambia x con y

Con ello la función inversa queda definida

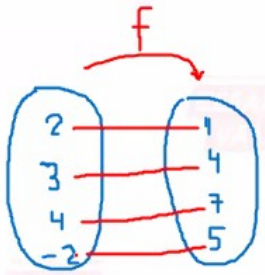
Propiedades:

$f = \{(2,1);(3;4);(4;7);(-2;5)\}$

$f^* = \{(1,2);(4;3);(7;4);(5,-2)\}$

✓ $Dom f^* = \{1,4;7;5\} = Ran f$

✓ $Ran f^* = \{2;3;4;-2\} = Dom f$



3) Cálculo de $f^*(x)$

Para ello de: $y = f(x)$

- Se despeja x en función de y
- Se intercambia x con y

Con ello la función inversa queda definida

Propiedades:

1) $Domf^* = Ranf \quad \wedge \quad Ranf^* = Domf$

2) $f(x) = y \quad \rightarrow \quad x = f^*(y)$ ✓

3) $(f^* of)(x) = x \quad ; x \in Domf$

4) $(f of^*)(x) = x \quad ; x \in Domf^*$

5) $(f^*)^* = f$

6) La gráfica de f^* es simétrica a la gráfica de f respecto a la recta $y = x$

✓ $f^*_{(x)} = 3x - 7$ y $f(2) = a$. Halle $f(a+3)$

Resol:

Como $f(2) = a \rightarrow 2 = f^*(a)$

$2 = 3a - 7$

$a = 3$

Pide $f_{(a+3)} = f(6)$

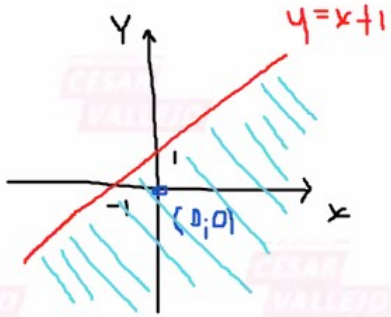
$f^*_{(x)} = 3x - 7 \rightarrow x = f(3x-7)$

$3x - 7 = 6 \rightarrow x = 13/3$

¡Gracias!

✓ $y \leq x+1$

i) $y = x+1$



ii) $y \leq x+1$

$0 \leq 0+1$

$0 \leq 1$ (V)

1) Sea la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2};\ x\geq 9$ tal que $f^{-1}(x)=\left(\dfrac{mx-1}{nx-1}\right)^2$; $Domf^{-1}=\langle a;b]$ determine $N=m+n-a-b$.

Resolución

El problema nos plantea la función f y su inversa por ello consideramos que estas son inyectivas:

Hallemos el $Ran\ f$ $=$ Domf

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}-1+1$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-2}+1$$

Tenemos: $x\geq 9 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{x}\geq 3$

$\xrightarrow{-2}\ \sqrt{x}-2\geq 1 \xrightarrow{(\ )^{-1}} 0<\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}\leq 1$

$\xrightarrow{+1}\ 1<\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}+1\leq 2 \rightarrow f(x)\in\langle 1;2]$

$\rightarrow\ Ran\ f=\langle 1;2] \rightarrow Domf^{-1}=\langle 1;2]$

$\rightarrow\ a=1\ \wedge\ b=2$

Hallemos $f^{-1}(x)$:

$$y=f(x) \rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{x}-2}+1 \rightarrow y-1=\frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{y-1}=\sqrt{x}-2 \rightarrow \frac{1}{y-1}+2=\sqrt{x}$$

$$\rightarrow \left(\frac{2y-1}{y-1}\right)^2=x \qquad y<>x:\ f^{-1}(x)=\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2$$

$\rightarrow\ m=2\ \wedge\ n=1 \quad \therefore\ N=0$

Clave E

2) Sea la función exponencial $f(x) = \left|2^{1-|x|} - 3\right|$ tal que $x \geq 2$ cuyo $Ranf = [\alpha; \beta\rangle$. Determine $N = \beta + 2\alpha$.

Resolución

Hallemos el rango de f, partiendo de:

$$x \geq 2$$

Formemos la regla de correspondencia:

$$|x| \geq 2$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} \quad -|x| \leq -2$$

$$\xrightarrow{+1} \quad 1 - |x| \leq -1$$

$$\xrightarrow{2^{(\ )}} \quad 0 < 2^{1-|x|} \leq 2^{-1}$$

$$\xrightarrow{-3} \quad -3 < 2^{1-|x|} - 3 \leq -\frac{5}{2}$$

$$\xrightarrow{|\ |} \quad 3 > \underbrace{\left|2^{1-|x|} - 3\right|}_{f(x)} \geq \frac{5}{2}$$

$$f(x) \in \left[\frac{5}{2}; 3\right\rangle = Ranf = [\alpha; \beta\rangle$$

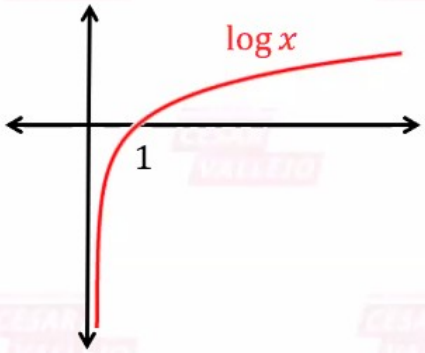
$$\therefore \ N = \beta + 2\alpha = 8$$

Clave D

3) Determine la gráfica de la función $y = |\log(|x| - 1)|$

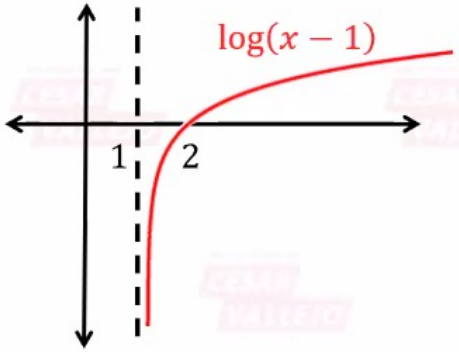
Resolución

Elaboremos la gráfica básica del logaritmo:

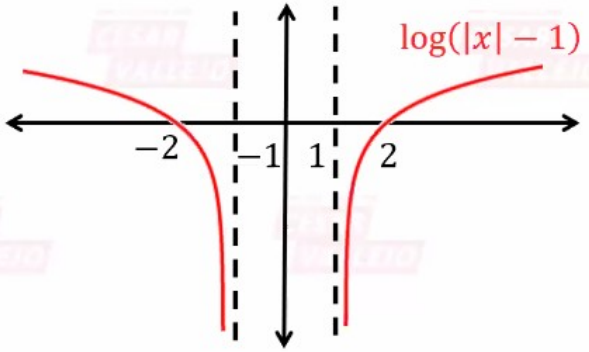


Operemos x

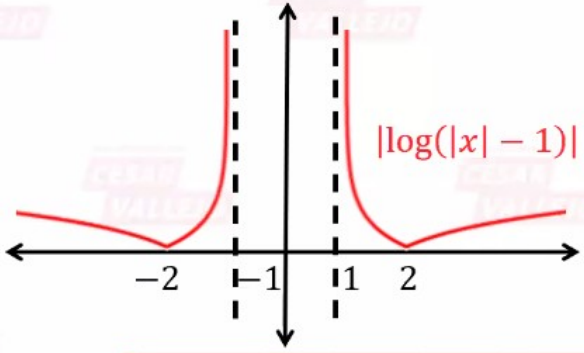
$x <> x - 1$



$x <> |x|$



Operando a toda la regla: $f(x) <> |f(x)|$



Clave C

4) Determine la gráfica de la relación siguiente $R = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / \big||x| - x\big| = |2y-1|\}$

Resolución

De la condición de R:

$$\big||x| - x\big| = |2y-1|$$

Si $x \geq 0$:

$$|x - x| = |2y-1|$$
$$0 = |2y-1|$$
$$\frac{1}{2} = y$$

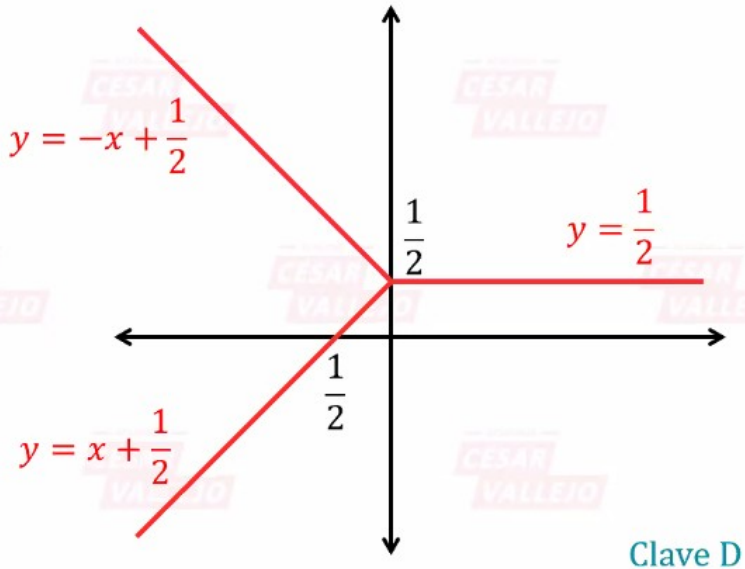
Si $x < 0$:

$$|-x - x| = |2y-1|$$
$$|-2x| = |2y-1|$$

Por teoremas de valor absoluto se tiene:

$$-2x = 2y-1 \quad \vee \quad 2x = 2y-1$$

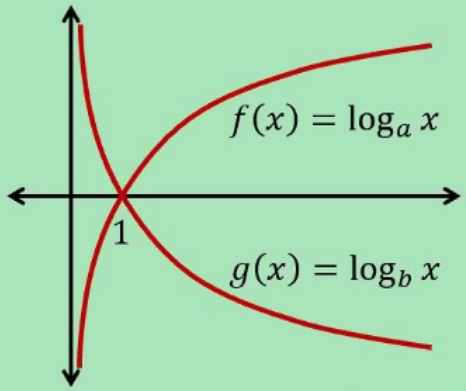
$$-x + \frac{1}{2} = y \quad \vee \quad x + \frac{1}{2} = y$$



Clave D

Grabando
CICLO REPASO UNI
Usted está viendo la pantalla de ALEX ANTONIO BRAVO ARAUJO
Ver Opciones

5) Dado el gráfico



indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F).

I. $b^{-1} > 1 > a^{-2}$ (V)

II. $h(x) = \log_a x + \operatorname{colog}_b x$ es creciente.

III. La función $P(x) = (ab)^x$ es decreciente.

Resolución

Del gráfico se tiene que:

I. $a > 1 \quad \wedge \quad 1 > b > 0$

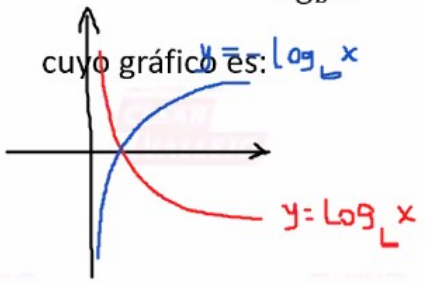
$\xrightarrow{(\,)^{-1}} \quad \frac{1}{a} < 1 \quad \wedge \quad 1 < \frac{1}{b}$

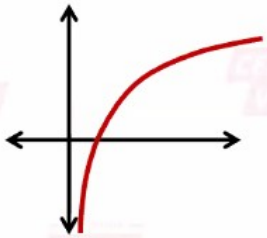
$\xrightarrow{(\,)^{2}} \quad a^{-2} < 1 \quad \wedge \quad 1 < b^{-1}$

II. Sea $k(x) = \operatorname{colog}_b x$

$= -\log_b x$

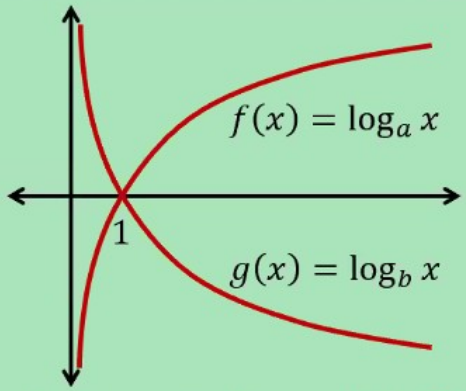
cuyo gráfico es:





www.academiacesarvallejo.edu.pe
ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

5) Dado el gráfico



indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F).

I. $b^{-1} > 1 > a^{-2}$ **(V)**

II. $h(x) = \log_a x + \operatorname{colog}_b x$ es creciente. **(V)**

III. La función $P(x) = (ab)^x$ es decreciente.

Resolución

Del gráfico se tiene que:

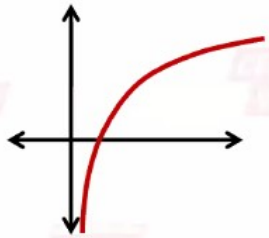
I. $a > 1 \quad \wedge \quad 1 > b > 0$

$\xrightarrow{(\,)^{-1}} \quad \frac{1}{a} < 1 \quad \wedge \quad 1 < \frac{1}{b}$

$\xrightarrow{(\,)^{2}} \quad a^{-2} < 1 \quad \wedge \quad 1 < b^{-1}$

II. Sea $k(x) = \operatorname{colog}_b x$

$= -\log_b x$



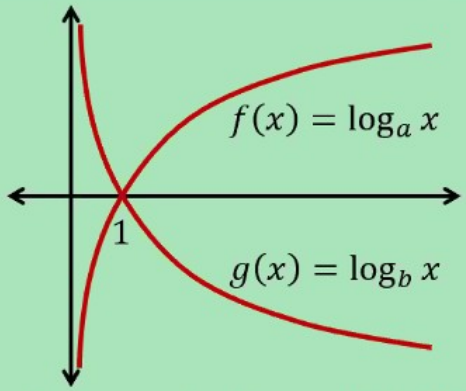
cuyo gráfico es:

$h(x) = \log_a x + \operatorname{colog}_b x \quad \rightarrow \quad h(x)$ es creciente

creciente creciente

✓ antilog$_b$ $x = b^x$

5) Dado el gráfico



indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F).

I. $b^{-1} > 1 > a^{-2}$ **(V)**

II. $h(x) = \log_a x + \operatorname{colog}_b x$ es creciente. **(V)**

III. La función $P(x) = (ab)^x$ es decreciente. **(F)**

Resolución

Del gráfico se tiene que:

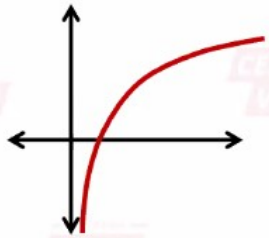
I. $a > 1 \quad \wedge \quad 1 > b > 0$

$\xrightarrow{(\,)^{-1}} \quad \frac{1}{a} < 1 \quad \wedge \quad 1 < \frac{1}{b}$

$\xrightarrow{(\,)^{2}} \quad a^{-2} < 1 \quad \wedge \quad 1 < b^{-1}$

II. Sea $k(x) = \operatorname{colog}_b x$

$= -\log_b x$



cuyo gráfico es:

$h(x) = \underbrace{\log_a x}_{\text{creciente}} + \underbrace{\operatorname{colog}_b x}_{\text{creciente}} \rightarrow h(x)$ es creciente

III. Considerando: $a = 6 \quad \wedge \quad b = \frac{1}{3}$

y reemplazando en $P(x) = (ab)^x$ se tiene:

$P(x) = (2)^x$ este es creciente

Clave B

7) Sean f y g funciones inyectivas, tales que $f^*(x) = 3x + 5$; $g(x) = \frac{x}{4} + 1$. Si $(g^* \circ f)(a) = 4$ determine $(f^* \circ g)(a - 3)$.

Resolución

Por el dato se tiene:

$$(g^* \circ f)(a) = 4$$
$$g^*(f(a)) = 4$$
$$f(a) = g(4)$$
$$f(a) = 2$$
$$a = f^*(2)$$
$$a = 11$$

Piden:

$$(f^* \circ g)(a - 3) = (f^* \circ g)(8)$$
$$= f^*(g(8))$$
$$= f^*(3) = 14$$

$$\therefore \quad (f^* \circ g)(a - 3) = 14$$

Clave A

8) Dada la función $f(x) = -\sqrt{x^2+6x-7}\,; x \in \langle -\infty; -7]$; halle la función inversa de f si es que existe.

Resolución

Reescribamos la regla de correspondencia:

$$f(x) = -\sqrt{x^2+6x+9-16}$$

$$f(x) = -\sqrt{(x+3)^2-16}$$

Veamos la inyectividad: $f(x_1) = f(x_2)$

$$-\sqrt{(x_1+3)^2-16} = -\sqrt{(x_2+3)^2-16}$$

$$(x_1+3)^2-16 = (x_2+3)^2-16$$

$$\sqrt{(x_1+3)^2} = \sqrt{(x_2+3)^2}$$

$$|x_1+3| = |x_2+3|$$

$$-x_1-3 = -x_2-3$$

$$\rightarrow \quad x_1 = x_2$$

$\rightarrow$ f es inyectiva, por ello tiene inversa

Hallemos el rango de f: $x \in \langle -\infty; -7]$

$$\rightarrow \quad x \le -7 \quad \rightarrow \quad x+3 \le -4 \quad \rightarrow \quad (x+3)^2 \ge 16$$

$$\rightarrow \quad (x+3)^2-16 \ge 0$$

$$\rightarrow \quad \sqrt{(x+3)^2-16} \ge 0$$

$$\rightarrow \quad -\sqrt{(x+3)^2-16} \le 0$$

$$\rightarrow \quad f(x) \in \langle -\infty; 0] = Ran\, f = Dom\, f^*$$

Hallemos $f^*(x)$: $\quad y = -\sqrt{(x+3)^2-16}$

$$\rightarrow \sqrt{(x+3)^2-16}^{\,2} = (-y)^2 \quad \rightarrow \quad (x+3)^2-16 = y^2$$

$$\rightarrow \sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{y^2+16} \quad \rightarrow \quad |x+3| = \sqrt{y^2+16}$$

$$\rightarrow \quad -x-3 = \sqrt{y^2+16} \quad \rightarrow \quad x = -\sqrt{y^2+16}-3$$

$y <> x$: $f^*(x) = -\sqrt{x^2+16}-3; x \in \langle -\infty; 0]$ Clave B

9) Determine la inversa de la función $f(x)=\dfrac{3^x-1}{3^x+2}\ ;x\in\mathbb{R}$

Resolución

Reescribamos la regla de correspondencia de f

$$f(x)=\frac{3^x-1}{3^x+2}-1+1=\frac{-3}{3^x+2}+1$$

Demostrar la inyectividad (similar al problema anterior), con ello garantizamos que tiene inversa

Hallemos el rango de f ($\text{Ran}f=\text{Dom}\,f^{-1}$)

Sabemos: $3^x>0\ ;x\in\mathbb{R}$

$\leftrightarrow\quad 3^x+2>2$

inversa $\quad 0<\dfrac{1}{3^x+2}<\dfrac{1}{2}$

Por (-3) $\quad 0>\dfrac{-3}{3^x+2}>-\dfrac{3}{2}$

más 1 $\quad 1>\dfrac{-3}{3^x+2}+1>-\dfrac{1}{2}$

$$f(x)\in\left\langle-\frac{1}{2};1\right\rangle=Ran\,f=\text{Dom}f^{-1}$$

Hallemos $f^*(x)$: $\quad y=\dfrac{-3}{3^x+2}+1$

$\leftrightarrow\ y-1=\dfrac{-3}{3^x+2}\qquad\leftrightarrow\ 3^x+2=\dfrac{-3}{y-1}$

$\leftrightarrow 3^x=\dfrac{-2y-1}{y-1}\qquad\leftrightarrow\ 3^x=\dfrac{2y+1}{1-y}$

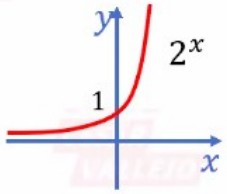
$\log_3 3^x=\log_3\left(\dfrac{2y+1}{1-y}\right)\quad\leftrightarrow\quad x=\log_3\left(\dfrac{2y+1}{1-y}\right)$

$y<>x:\ f^*(x)=\log_3\left(\dfrac{2x+1}{1-x}\right);x\in\left\langle-\dfrac{1}{2};1\right\rangle$ Clave B

10) Determine la gráfica de la función $f(x) = \left|2^{|x|-1} - 1\right|; x \in \mathbb{R}$.

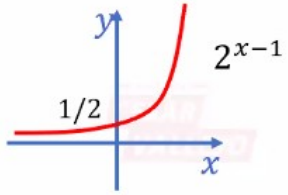
Resolución

Elaboremos la gráfica básica de la exponencial:

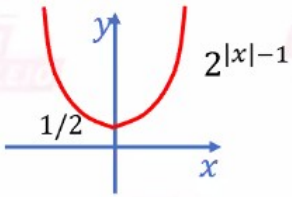


Operemos x

$x <> x - 1$

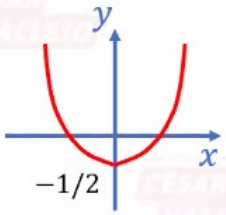


$x <> |x|$

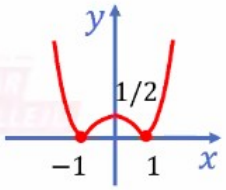


Operemos a la regla de correspondencia:

$g(x) <> g(x) - 1$



$h(x) <> |h(x)|$



$f_{(x)} = \left|2^{|x|-1} - 1\right|$

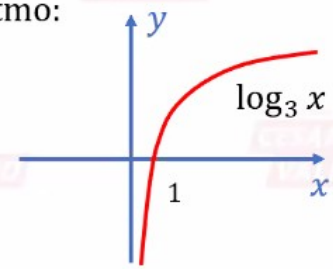
Clave D

Grabando
CICLO REPASO UNI
Usted está viendo la pantalla de ALEX ANTONIO BRAVO ARAUJO
Ver Opciones

11) Determine la gráfica de la función $f(x) = |\log_3|x-1|| - 1$

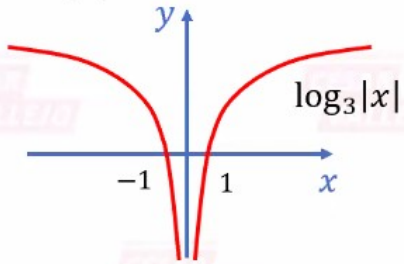
Resolución

Elaboremos la gráfica básica del logaritmo:

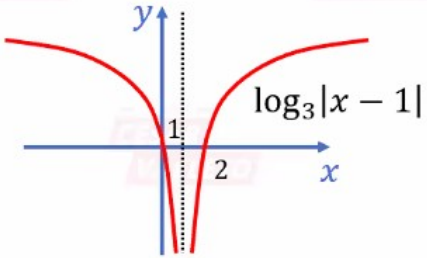


Operemos x

$x <> |x|$

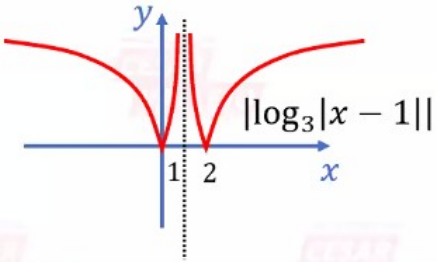


$x <> x-1$

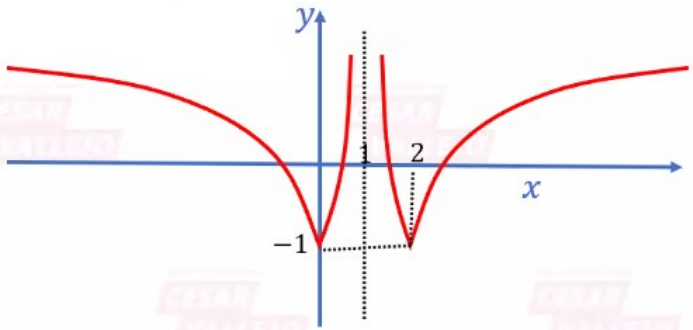


Operemos a la regla :

$g(x) <> |g(x)|$



$h(x) <> h(x)-1$



$f(x) = |\log_3|x-1|| - 1$

Clave B

www.academiacesarvallejo.edu.pe
ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

12) Respecto a la siguiente inecuación, determine el valor de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones

$$\log_{[\![x]\!]}[\![x]\!] \geq \frac{\sqrt{3}}{[\![e]\!]}$$

I) Su conjunto solución es un intervalo acotado. **(F)**
II) El supremo del conjunto solución es 2. **(F)**
III) 221/2 es una solución de la inecuación. **(V)**

Resolución

$\log_{[\![x]\!]}[\![x]\!] \in \mathbb{R} \leftrightarrow \underbrace{[\![x]\!] > 0 \ \wedge \ [\![x]\!] \neq 1}$

Pero $[\![x]\!] \in \mathbb{Z}$: $\quad [\![x]\!] \in \{2; 3; 4; \ldots\} \leftrightarrow x \geq 2$

De la desigualdad tenemos :

$$\underbrace{\log_{[\![x]\!]}[\![x]\!]}_{1} \geq \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{[\![e]\!]}}_{2} \leftrightarrow 1 \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$$

Verdadero

$\therefore CS = [2;+\infty\rangle$

I) CS es no acotado
II) 2 es ínfimo
III) $221/2 \in CS$

Clave D

¡Tenga en cuenta que ...!

$$[\![x]\!] = n \in \mathbb{Z} \leftrightarrow n \leq x < n+1$$

Ejemplos

$[\![5{,}1]\!] = 5$; $[\![7{,}9]\!] = 7$; $[\![e]\!] = 2$

$[\![-5{,}1]\!] = -6$; $[\![-7{,}9]\!] = -8$